

# SIGNÁLY A SOUSTAVY, SIGNÁLY A SYSTÉMY

## TÉMATICKÉ OKRUHY

### 1. Signály se spojitým časem

Základní signály se spojitým časem (základní spojité signály). Jednotkový skok  $\sigma(t)$ , jednotkový impuls (Diracův impuls)  $\delta(t)$ . Lineárně rostoucí signál. Harmonický signál  $f(t) = C \cos(\omega t - \varphi)$  a jeho parametry. Manipulace se signály. Je dán signál  $s(t)$  rovnicí nebo grafem. Stanovení signálu  $s(t - \tau)$ , signálu posunutého v čase. Stanovení signálu  $s(-t)$ , signálu s otočenou (obrácenou) časovou osou. Kombinace otočení časové osy a posunutí v čase. Střední výkon harmonického signálu. Stejnoseměrná složka a střední výkon periodického impulsu (periodického sledu obdélníkových impulsů).

### 2. Periodické signály se spojitým časem

Definice (spojitého) periodického signálu. Fourierova řada v komplexním tvaru (Fourierova řada periodické funkce),  $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} c_k \exp(k\omega_1 t)$ . Modul a argument komplexního koeficientu Fourierovy řady. Velikost a znaménko stejnosměrné složky periodického signálu a její určení z množiny koeficientů Fourierovy řady. Určení amplitudy harmonické složky periodického signálu  $f(t)$ , je-li dán koeficient  $c_k$ ,  $k \neq 0$ , Fourierovy řady. Spektrum modulů a spektrum argumentů (amplitudové spektrum a fázové spektrum). Spektrum periodicky se opakujících obdélníkových impulsů.

### 3. Analýza spojitých aperiodických signálů

Fourierova transformace,  $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt$ . Vzor a obraz (signál a spektrální funkce). Inverzní Fourierova transformace. Modul obrazu (amplitudové spektrum), argument obrazu (fázové spektrum). Vlastnosti obrazu reálného vzoru (vlastnosti reálné a imaginární části obrazu obecného reálného signálu). Vlastnosti obrazu sudého a lichého vzoru. Posunutí vzoru (posunutí funkce, posunutí signálu) v čase. Spektrum pravoúhlého impulsu. Energie obdélníkového impulsu.

### 4. Vnější popis lineárních soustav se souvislým časem

Lineární časově invariantní (lineární neparаметrické) systémy a jejich popis. Diferenciální rovnice systému. Operátorový přenos systému (obvyklá značení:  $F(p)$ ,  $H(p)$ ,  $K(p)$ ). Nuly a póly. Určení operátorového přenosu systému na základě diferenciální rovnice systému. Rozklad na částečné zlomky. Frekvenční přenos systému (komplexní kmitočtová charakteristika,  $F(j\omega)$ ,  $H(j\omega)$ ,  $K(j\omega)$ ). Amplitudová (modulová) kmitočtová charakteristika. Fázová (argumentová) kmitočtová charakteristika. Impulsní charakteristika  $g(t)$  a přechodová charakteristika  $h(t)$ .

### T5 Vzorkování

Ideální vzorkování. Periodizace spektra při vzorkování. Vzorkovací kmitočet (vzorkovací frekvence). Signál s omezeným spektrem. Vzorkovací teorém. Aliasing efekt. Rekonstrukce

signálu se spojitém časem z jeho vzorků - frekvenční pohled (rekonstrukce v kmitočtové oblasti). Frekvenční přenos (přenosová funkce) ideálního rekonstrukčního filtru. Rekonstrukce signálu ze vzorků – časový pohled (rekonstrukce v časové oblasti).

## 6. Diskrétní signály

Diskrétní normovaný čas (značení:  $k, n$ ) a skutečný čas ( $kT, nT$ ). Signály s diskretním časem.

Diskrétní jednotkový impuls ( $\delta(k), \delta(n)$ ). Diskrétní jednotkový skok ( $\sigma(k), \sigma(n)$ ).

Harmonická posloupnost ( $f(kT) = C \cos(\Omega kT + \varphi)$ ,  $f(k) = C \cos(\omega k + \varphi)$ ). Otázka periodicity harmonické posloupnosti. Manipulace s diskretními signály. Posun v čase. Otočení časové osy. Otočení časové osy s posunutím. Pravoúhlé okno.

## 7. Diskrétní Fourierova řada a Fourierova transformace diskretního signálu

Diskrétní Fourierova řada. Definice. Necht'  $s(n)$  je periodická posloupnost s periodou  $n$ . Pak

obraz  $S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kn\right)$ . Obraz (koeficienty diskretní Fourierovy řady) je také

periodická posloupnost s periodou  $N$ . Zpětná diskretní Fourierova řada,

$$s(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S(k) \exp\left(j \frac{2\pi}{N} nk\right).$$

Fourierova transformace diskretního signálu. Je označována  $F(\omega)$ ,  $S(e^{j\omega})$ .

$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \exp(-j\omega n)$ . Posloupnost  $f(n)$  je vzor,  $F(\omega)$  je obraz. Periodicita funkce

$F(\omega)$ .

## 8. Diskrétní Fourierova transformace

Diskrétní Fourierova transformace (DFT). Přiřazuje vzoru  $f(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ , obraz

$S(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ .  $S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \exp\left(-jk \frac{2\pi}{N} n\right)$  Zpětná diskretní Fourierova

transformace.  $f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(k) \exp\left(jn \frac{2\pi}{N} k\right)$ . Pojem rychlá Fourierova transformace (Fast

Fourier Transform, FFT).

## 9. Vnější popis diskretních systémů

Vnější popis systémů s diskretním časem. Diferenční rovnice. Operátorový přenos systému (přenosová funkce systému)  $F(z)$ ,  $H(z)$ . Póly a nulové body. Z-transformace,

$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$ ,  $S(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(n)z^{-n}$ . Z-transformace jednotkového skoku, jednotkového

impulsu a reálného exponenciálního signálu. Vlastnosti Z-transformace. Linearita transformace a obraz posunutí posloupnosti. Nulové body a póly.

## 10. Frekvenční přenos diskretního systému

Frekvenční přenos (kmitočtové charakteristiky) systému s diskretním časem,

$F(j\omega)$ ,  $H(e^{j\omega})$ . Uvažujeme  $T = 1$ . Pak  $F(j\omega) = F(z)|_{z=\exp(j\omega)} = H(e^{j\omega})$ . Impulsní

charakteristika diskretního systému. Vztah impulsní charakteristiky k přenosu systému FIR.

## VZOROVÉ PŘÍKLADY

### Příklad T1/1

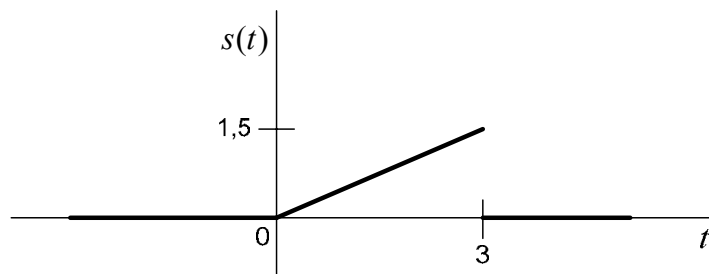
Je dán signál

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0, \\ 0,5t & \text{pro } 0 \leq t < 3 \text{ a} \\ 0 & \text{pro } t \geq 3. \end{cases}$$

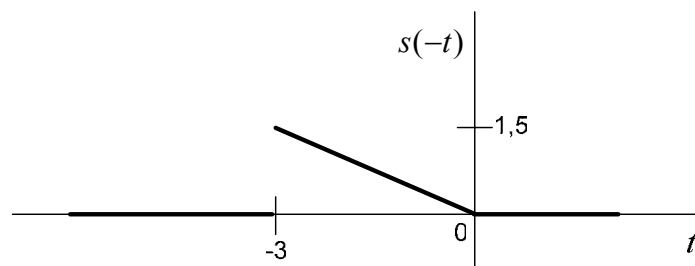
Pro  $|t| < 3$  nakreslete graf signálu  $s(-t + 2)$ .

### Řešení

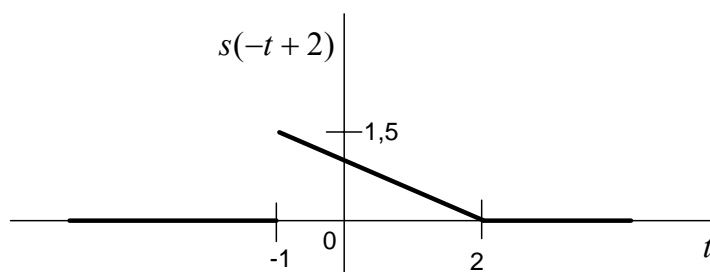
Nejprve nakreslíme graf signálu  $s(t)$ :



Pak nakreslíme graf signálu  $s(-t)$ :



A nakonec posunutím v čase získáme signál  $s(-t + 2)$ :



### Příklad T2/1

Reálný periodický signál má jen 3 od nuly různé koeficienty Fourierovy řady. Jsou dány hodnoty dvou těchto koeficientů  $c_0 = -1$ ,  $c_1 = 1,4 \exp(-j0,3\pi)$  a perioda signálu  $T_1 = 0,4$ . Určete třetí koeficient (využijte toho, že signál je reálný). Určete okamžitou hodnotu signálu v čase  $t = 0,1$ .

#### Řešení

Vzhledem k tomu, že je signál reálný, je třetí koeficient roven komplexně sdružené hodnotě koeficientu  $c_1$  tedy  $c_{-1} = 1,4 \exp(+j0,3\pi)$ . Pro kmitočet základní harmonické platí

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,4} = 5\pi$$

Časový průběh signálu je pak určen jako  $f(t) = c_{-1} \exp(-j\omega_1 t) + c_0 + c_1 \exp(j\omega_1 t)$ . Dosazením hodnot obdržíme

$$\begin{aligned} f(t) &= c_{-1} \exp(-j\omega_1 t) + c_0 + c_1 \exp(j\omega_1 t) = \\ &= 1,4 \exp(+j0,3\pi) \cdot \exp(-j5\pi t) - 1 + 1,4 \exp(-j0,3\pi) \cdot \exp(+j5\pi t) \end{aligned}$$

V čase  $t = 0,1$  bude hodnota signálu rovna

$$\begin{aligned} f(0,1) &= 1,4 \exp(+j0,3\pi) \cdot \exp(-j0,5\pi) - 1 + 1,4 \exp(-j0,3\pi) \cdot \exp(+j0,5\pi) = \\ &= -1 + 1,4 \exp(-j0,2\pi) + 1,4 \exp(+j0,2\pi) = -1 + 1,4(2 \cos(0,2\pi)) = 1,265 \end{aligned}$$

### Příklad T3/1

Signál  $f(t)$  je zadán svým obrazem  $F(\omega)$  ve Fourierově transformaci:

$$F(\omega) = \begin{cases} 60 & \text{pro } \omega = 0 \\ 60 \frac{\sin 15\omega}{15\omega} & \text{pro } \omega \neq 0. \end{cases}$$

Stanovte okamžitou hodnotu signálu  $f(t-8)$  pro  $t = -2$  s.

Pomůcka: Nejprve určete spektrum sudého signálu, který má tvar pravoúhlého impulsu s výškou  $D$  a šířkou  $\mathcal{G}$ .

#### Řešení

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt = D \int_{-g/2}^{g/2} \exp(-j\omega t) dt = \begin{cases} D\mathcal{G} & \text{pro } \omega = 0 \\ D\mathcal{G} \frac{\sin \frac{\omega}{2} \mathcal{G}}{\frac{\omega}{2}} & \text{pro } \omega \neq 0. \end{cases}$$

Signál  $f(t)$  je tedy obdélníkovým impulsem se součinem výšky  $D$  a šířky  $\mathcal{G}$  rovným 60.

Polovina šířky impulsu je 15. Odtud  $\mathcal{G} = 30$  a  $D = \frac{60}{30} = 2$ . Po nakreslení grafu signálu  $f(t)$

snadno zjišťujeme, že  $f(-2-8) = f(-10) = 2$ .

### Příklad T4/1

Lineární, časově invariantní systém je popsán diferenciální rovnicí  $y'(t) + y(t) = 2x(t)$  s nulovou počáteční podmínkou a kde  $x(t)$  je vstup systému a  $y(t)$  je výstup systému. Na vstup systému působí signál  $x(t) = \sigma(t)$ . Určete průběh výstupu a načrtněte.

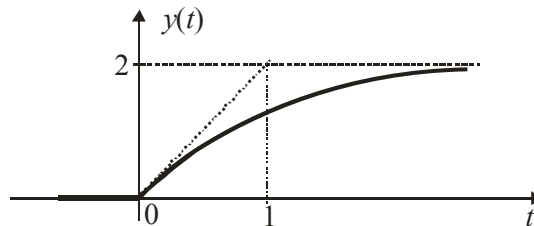
Pomůcka:  $L\{e^{-at}\} = \frac{1}{p+a}$

### Řešení

Pro operátorový přenos systému platí  $F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{2}{p+1}$ . Pro Laplaceův obraz vstupního

signálu platí  $X(p) = \frac{1}{p}$ . Pro Laplaceův obraz výstupu pak platí  $Y(p) = F(p)X(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{2}{p+1}$ .

Rozkladem tohoto výrazu na parciální zlomky obdržíme  $Y(p) = \frac{2}{p} - \frac{2}{p+1}$ . Časový průběh je dán zpětnou Laplaceovu transformací, tedy pro  $t \geq 0$  platí  $y(t) = 2 - 2e^{-t} = 2(1 - e^{-t})$ .



### Příklad T5/1

Fourierova řada spojitého periodického signálu má tvar  $f(t) = \sum_{n=-4}^{+4} c_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}$ . Základní perioda

$T$  signálu je 1msec. Tento signál je vzorkován a vzorky jsou vstupním signálem ideální dolní propusti. Jaký musí být vzorkovací kmitočet aby na výstupu dolní propusti byl tentýž spojitý signál?

### Řešení

Horní mezní kmitočet  $f_{\max}$  spektra signálu  $f(t)$  je dán kmitočtem čtvrté harmonické složky.

$f_{\max} = 4 \cdot \frac{1}{1 \cdot 10^{-3}} = 4 \cdot 10^3$  Hz. Vzorkovací kmitočet proto musí být větší, než 8 tisíc vzorků za sekundu.

### Příklad T6/1

Pro  $k = 3$  určete hodnotu signálu  $f(k) = 5 \cos(0,5\pi k - 0,5\pi) + \delta(k - 4) + 2\sigma(k - 1)$ .

### Řešení

$$f(3) = 5 \cos(0,5\pi \cdot 3 - 0,5\pi) + \delta(3 - 4) + 2\sigma(3 - 1) = -5 + 0 + 2 = -3.$$

### Příklad T7/1

Je dána periodická posloupnost s periodou 4:  $s(0) = 1, s(1) = 0, s(2) = 0, s(3) = 2$ . Stanovte prvek  $S(3)$  obrazu. Pomůcka:  $S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kn\right)$ .

**Řešení**

$$S(3) = \sum_{n=0}^3 s(n) \exp\left(-j \frac{2\pi}{4} 3n\right) = 1 \exp(0) + 0 + 0 + 2 \exp(-j \frac{2\pi}{4} 3 \cdot 3) = 1 - 2j.$$

**Příklad T8/1**

Obraz v diskretní Fourierově transformaci je tvořen právě těmito čtyřmi prvky:  $S(0) = 2, S(1) = 1-j, S(2) = 0, S(3) = 1+j$ . Stanovte prvek  $f(2)$  vzoru. Pomůcka:

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(k) \exp\left(jn \frac{2\pi}{N} k\right).$$

**Řešení**

$$f(2) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 S(k) \exp\left(j2 \frac{2\pi}{4} k\right) = \frac{1}{4} [2 \exp(0) + (1-j) \exp(j\pi) + 0 + (1+j) \exp(j3\pi)] = 0.$$

**Příklad T9/1**

System s diskretním časem má přenosovou funkci  $F(z) = 1 + z^{-1}$ . Určete amplitudu ustálené harmonické odezvy  $y(n) = Y \cos(\omega n + \psi)$  na posloupnost  $x(n) = X \cos(\omega n + \varphi) = 5 \cos(0,2\pi n + 0,4\pi)$ . Symbol  $n$  označuje normovaný (celočíslný) čas, symbol  $\omega$  označuje normovaný úhlový kmitočet.

**Řešení**

$$F(z = e^{j0,2\pi}) = 1 + e^{-j0,2\pi}$$

$$Y = 5 \cdot |1 + e^{-j0,2\pi}| \doteq 5 \cdot 1,9021 \doteq 9,51.$$

**Příklad T10/1**

Je dán přenos  $F(z) = 2 + z^{-1} + z^{-2}$ . Určete impulsní charakteristiku systému.

**Řešení**

Při použití pouček o linearitě Z-transformace, poučky o obrazu opožděného signálu a znalosti obrazu funkce  $\delta(n)$  zjišťujeme, že impulsní charakteristika  $g(n)$  systému je dána vztahem

$$g(n) = 2\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2).$$

Poznámka: V některých učebnicích se místo označení  $g(n)$  používá označení  $h(n)$ .